

UAlg
esght

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

EXERCÍCIOS

Paulo Batista Basílio
(pbasilio@ualg.pt)

Dezembro 2014

1. Calcule a função de probabilidade da variável "número de rapazes numa família de 4 crianças". Assuma igual probabilidade para cada sexo. Represente graficamente a função de probabilidade.

2. Seja X uma variável aleatória cuja função de probabilidade é a seguinte:

X	0	1	2	3	4	5
f(x)	0.1	0.3	0.4	0.1	0.05	0.05

a) Represente graficamente a respectiva função acumulada de massa.

b) Calcule $P(X < 4.5)$, $P(X \geq 2)$, $P(2 \leq X < 4.5)$.

3. A procura do produto X (em toneladas) é uma variável aleatória com função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{x}{8} & 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{outros valores} \end{cases}$$

a) mostre que se trata de uma função densidade de probabilidade e faça a sua representação gráfica;

b) calcule a probabilidade da procura do produto X estar entre 1 e 3 toneladas;

c) determine a procura esperada para o produto X.

4. A variável aleatória X é caracterizada pela seguinte f.d.p.:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 < x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{12}, & 1 < x < 3 \\ 0, & \text{outros valores} \end{cases}$$

a) verifique que se trata de uma f.d.p..

b) determine F(x).

c) calcule $P(X < 1/2)$, $P(X \geq -2/3)$ e $P(1/2 < X < 2)$.

5. O verdadeiro peso de sacos de um quilo de café de certa marca é aleatório e (segundo uma organização de defesa do consumidor) apresenta uma densidade de probabilidade uniformemente distribuída entre 0,80 Kg e 1,05 Kg:

$$f(x) = \begin{cases} k, & 0.80 < x < 1.05 \\ 0, & \text{outros valores} \end{cases}$$

a) Calcule k.

b) Determine F(x).

c) Qual é a probabilidade de um saco de café da referida marca pesar menos de 1 Kg?

d) Da produção total dessa marca, qual é a percentagem de sacos com peso superior ao indicado no rótulo?

6. Imagine que logo à noite vai vender cachorros para a "Rua do Crime". As probabilidades que atribui às quantidades que espera vender são:

X	80	90	100	110	120	130	140
$f(x)$	0.05	0.1	0.25	0.35	0.1	0.1	0.05

- Calcule a probabilidade de vender pelo menos 120 cachorros.
- Qual é a sua venda esperada? Calcule igualmente a variância do volume de vendas. Comente o resultado.
- Suponha que compra cada cachorro por 1,50 € e vende por 2,50 €. Assim, por cada cachorro que venda ganha 1,00 € e por cada cachorro que fique por vender perde 1,50 €. Qual é o lucro esperado se comprar 110 cachorros?

7. O director de compras da empresa Baratinho pretende definir uma política de aquisição de matéria prima para o próximo ano. As necessidades de matéria prima por dia (em milhares de toneladas) são uma variável aleatória contínua com f.d.p.:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2}, & 0 < x < k \\ 0, & \text{outros valores} \end{cases}$$

- Calcule k .
- Se quiser que a probabilidade de ruptura do stock de matéria prima seja igual a 0,02, qual é o nível de abastecimento que deve ser assegurado diariamente?
- Suponha que ele resolveu manter um nível de stocks que lhe assegure que a probabilidade de ruptura é de 0,02. A administração propôs dar-lhe um prémio de 10 d' por cada dia em que não houvesse ruptura, mas cobrar-lhe uma multa de 500 d' sempre que tal se verificasse. Acha que é de aceitar? Justifique.

8. O tempo, em horas, que um computador funciona sem problemas é uma variável aleatória contínua com f.d.p. dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-x/100}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

- calcule a probabilidade de um computador funcionar entre 50 e 150 horas sem qualquer problema;
- qual é a probabilidade dele funcionar menos de 100 horas?

9. Considere a seguinte f. d. p.:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \frac{1}{2} \leq x \leq k \\ 0, & \text{outros valores} \end{cases}$$

- a) Calcule k de modo a a f(x) ser uma f. d. p. e represente a função.
b) Calcule b de modo a que $P(X \leq b) = 0.5$.

10. Considere a seguinte função de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{14}, & x = 1, 2, 3 \\ 0, & \text{outros valores} \end{cases}$$

- a) Mostre que esta função de probabilidade satisfaz as propriedades de qualquer função probabilidade e represente-a graficamente.
b) Deduza a função de distribuição e represente-a graficamente.
c) Calcule $P(X = 1|X \leq 2)$.

11. Considere a V. A. X, contínua, com função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{outros valores} \end{cases}$$

- a) Mostre que se trata de uma f. d. p. e faça a sua representação gráfica.
b) Deduza a f. de distribuição, F(x), e represente-a graficamente.
c) Calcule $P(X \leq 1)$, $P(\frac{1}{4} < X \leq \frac{1}{2})$ e $P(X > \frac{2}{3})$.
d) Calcule $P(X < 1|\frac{1}{2} < X < 2)$.

12. Determine E(X) e Var(X) das seguintes distribuições:

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{14}, & x = 1, 2, 3 \\ 0, & \text{outros valores} \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 < x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{12}, & 1 < x < 3 \\ 0, & \text{outros valores} \end{cases}$$

13. Calcule a média e a variância das seguintes distribuições de variáveis aleatórias:

$$a) f(x) = \frac{1}{2}, \quad 2 < x < 4.$$

$$b) F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{2}}, \quad x > 0.$$